nombres entiers; il faut encore montrer qu'ils sont positifs. Or, en prenant les logarithmes

$$\log(1-2\cdot 2^{-s}) = \Sigma t_n \log(1-2^{-ns})$$

et en développant les deux membres, on aura

$$\begin{aligned}
&\tfrac{2}{1}\cdot 2^{-s}+\tfrac{4}{2}\cdot 4^{-s}+\tfrac{8}{3}\cdot 8^{-s}+\tfrac{16}{4}\cdot 16^{-s}+\tfrac{32}{5}\cdot 32^{-s}+\tfrac{64}{6}\cdot 64^{-s}+\ldots\\
&= t_1(2^{-s}+\tfrac{1}{2}\cdot 4^{-s}+\tfrac{1}{3}\cdot 8^{-s}+\tfrac{1}{4}\cdot 16^{-s}+\tfrac{1}{5}\cdot 32^{-s}+\tfrac{1}{6}\cdot 64^{-s}+\ldots)\\
&+ t_2(\qquad 4^{-s} \qquad +\tfrac{1}{2}\cdot 16^{-s} \qquad +\tfrac{1}{3}\cdot 64^{-s}+\ldots)\\
&+ t_3(\qquad\qquad 8^{-s} \qquad\qquad +\tfrac{1}{2}\cdot 64^{-s}+\ldots)\\
&+ t_4(\qquad\qquad 16^{-s} \qquad\qquad +\ldots)+\ldots
\end{aligned}$$

Ceci donne un nouveau moyen pour déterminer les nombres t_n quand on égale les coefficients des mêmes puissances de 2^{-s} dans les deux membres.

On obtient ainsi

$$\frac{2}{1} = t_1\,; \quad \frac{2^2}{2} = \frac{1}{2}t_1+t_2\,; \quad \frac{2^3}{3} = \frac{1}{3}t_1+t_3\,;$$

$$\frac{2^4}{4} = \frac{1}{4}t_1+\frac{1}{2}t_2+t_4\,, \text{ etc.}$$

La forme générale de ces équations s'exprime par la formule

$$\frac{2^n}{n} = \frac{1}{n}t_1+\frac{d_1}{n}t_{d_1}+\frac{d_2}{n}t_{d_2}+\ldots+\frac{n}{n}t_n,$$

en désignant par 1, d_1, d_2, ..., n tous les diviseurs de l'exposant n. Cette équation peut s'écrire

$$2^n = \Sigma_i d_i t_{d_i}\,,$$

la sommation comprenant tous les diviseurs de n. Mais quand on a [1])

$$F(n) = \Sigma f(d_i)\,,$$

la fonction f est déterminée par la formule

$$f(n) = F(n)-\Sigma F\left(\frac{n}{p}\right)+\Sigma F\left(\frac{n}{pp'}\right)-\Sigma F\left(\frac{n}{pp'p''}\right)+\ldots$$

---

[1]) Voir p. ex. Bachmann, Zahlentheorie, I, p. 39.

où p, p', p'', ... représentent tous les nombres premiers qui divisent n. En désignant par $\mu(m)$ le «facteur de Möbius» correspondant à m, on peut poser

$$f(n) = \Sigma\mu(d_i)\cdot F\left(\frac{n}{d_i}\right).$$

On aura donc dans notre cas

$$nt_n = \Sigma\mu_{d_i}\cdot 2^{\frac{n}{d_i}}$$

comme expression générale des nombres t_n.

Par exemple $n = 10$ donne $10t_{10} = 2^{10} - 2^5 - 2^2 + 2^1 = 990$, $t_{10} = 99$; $n = 12$ donne $12t_{12} = 2^{12} - 2^6 - 2^4 + 2^2 = 4020$, $t_{12} = 335$.

On voit donc que nt_n s'exprime par une série de puissances de 2, dont la plus grande est $+2^n$; la suivante est $-2^{\frac{n}{p}}$, p étant le plus petit nombre premier qui divise n; les autres auront des exposants plus petits et les coefficients $+1$ ou -1. Il est donc évident que les t_n formeront une suite de nombres croissants positifs, t_n étant $\frac{2^n}{n}$ diminué d'une quantité qui est moindre que $\frac{2^{\frac{n}{2}+1}}{n}$. Nous avons ainsi complètement déterminé les nombres primitifs correspondants à la suite B, en trouvant combien il y a de ces nombres égaux à chaque puissance de 2.

En même temps nous avons trouvé les nombres primitifs correspondants à la série

$$C = 1 + 2^{-s} + 4^{-s} + 4^{-s} + 8^{-s} + 8^{-s} + 8^{-s} + 8^{-s} + 16^{-s} + \ldots,$$

déduite de A en remplaçant chaque nombre par la puissance de 2 qui lui est égale ou immédiatement supérieure. Car cette série s'obtient en multipliant le série B par $1 - 2^{-s}$. Elle a donc les mêmes nombres primitifs que celle-ci excepté le premier, savoir 2, qui dans C ne paraît qu'une seule fois.

Considérons ensuite les trois séries

$$A = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + 5^{-s} + 6^{-s} + 7^{-s} + 8^{-s} + 9^{-s} + \dots,$$
$$B = 1^{-s} + 2^{-s} + 2^{-s} + 4^{-s} + 4^{-s} + 4^{-s} + 4^{-s} + 8^{-s} + 8^{-s} + \dots,$$
$$C = 1^{-s} + 2^{-s} + 4^{-s} + 4^{-s} + 8^{-s} + 8^{-s} + 8^{-s} + 8^{-s} + 16^{-s} + \dots.$$

On voit que les termes de ces séries, dont les numéros sont $1, 2, 4, \dots, 2^m, \dots$, coïncident toujours; au reste les nombres qui entrent dans A sont plus grands que les correspondants de B mais plus petits que ceux de C. En prenant les sommes des m premiers termes seulement, on aura donc, en supposant $s > 0$,

$$B > A > C.$$

En outre, nous connaissons les nombres primitifs de chaque série, les nombres primitifs de A étant les nombres premiers.

Si l'on suppose que les nombres primitifs de B sont situés aux mêmes places que les nombres premiers dans A, en sorte qu'aux nombres premiers

$$2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \; \dots \; .$$

correspondraient en B

$$2 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \quad 8 \quad 8 \; \dots,$$

il est clair que ces derniers nombres, excepté le premier, seront plus petits que les nombres premiers correspondants.

Dans les développements respectifs de deux facteurs correspondants, p. ex.

$$\frac{1}{1-5^{-s}} = 1 + 5^{-s} + 25^{-s} + \dots,$$

$$\frac{1}{1-4^{-s}} = 1 + 4^{-s} + 16^{-s} + \dots,$$

les termes appartenant aux facteurs de B auraient donc suivant notre hypothèse des bases moindres que celles des termes correspondants dans A. A chaque nombre composé α dans A correspond un nombre β dans B formé au moyen des nombres primitifs de B correspondants à ceux de A, mais le nombre β serait toujours moindre que α. Aux nombres naturels inférieurs à 2^n correspondraient donc dans B également $2^n - 1$ nombres au plus égaux à 2^{n-1}, mais il y aurait encore dans B un surplus de nombres qui ne surpassent pas 2^n mais qui correspondraient à des nombres en A qui seraient plus grands. Il en serait de même à plus forte raison si les nombres primitifs dans B étaient dans tout intervalle 2^{n-1} à 2^n plus nombreux que dans A.

Mais en réalité les deux suites A et B contiennent précisément le même nombre de termes à bases plus petites que 2^n. On est donc conduit à la conclusion que les nombres premiers inférieurs à 2^n seront plus nombreux que les nombres primitifs dans B qui sont inférieurs à 2^n; ou, si l'on désigne par $\theta(m)$ le nombre des nombres premiers non supérieurs à m, que

$$\theta(2^n) > t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-1}.$$

Réciproquement, si l'on compare les deux séries A et C, on trouve par un raisonnement tout à fait analogue, que les nombres primitifs dans C qui ne surpassent pas 2^n seront plus nombreux que les nombres premiers jusqu'à la même limite, ou bien que

$$\theta(2^n) < 1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-1} + t_n.$$

L'exactitude des limites trouvées pour $\theta(2^n)$ se confirme pour de petites valeurs de n par l'énumération des nombres premiers. Au reste, il est évident que notre raisonnement n'est pas satisfaisant pour démontrer complètement les inégalités ci-dessus.

Je n'insisterai pas sur les diverses modifications qui peuvent être apportées aux considérations précédentes; je me bornerai à donner le résultat sous une autre forme qui peut être vérifiée exactement, en cherchant les expressions analogues à

$$\vartheta(2^n) = \theta(2^n) + \tfrac{1}{2}\,\theta(2^{\frac{n}{2}}) + \tfrac{1}{3}\,\theta(2^{\frac{n}{3}}) + \tfrac{1}{4}\,\theta(2^{\frac{n}{4}}) + \ldots$$

La fonction $\vartheta(2^n)$, qui exprime la totalité des puissances des nombres premiers divisés par leur exposants, se trouve le plus aisément en développant $\log A = -\Sigma \log(1-p^{-s})$ en série de Dirichlet, ce qui donne

$$\log A = \Sigma p^{-s} + \tfrac{1}{2}\Sigma p^{-2s} + \tfrac{1}{3}\Sigma p^{-3s} + \ldots.$$

La somme des coefficients des termes de cette série, dont les bases ne surpassent pas 2^n, est la valeur de $\vartheta(2^n)$. La fonction qui pour la série B correspond à $\vartheta(2^n)$ pourrait être formée au moyen des nombres t, mais se trouve plus facilement en développant

$$\log B = -\log(1-2\cdot 2^{-s}) = \tfrac{2}{1}\cdot 2^{-s} + \tfrac{4}{2}\cdot 4^{-s} + \tfrac{8}{3}\cdot 8^{-s} + \tfrac{16}{4}\cdot 16^{-s} + \ldots,$$

ce qui donne pour la somme des coefficients des puissances de 2 qui sont moindres que 2^n

$$\vartheta'(2^n) = \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{n-1}.$$

Pour la série C, on aura pareillement

$$\begin{aligned}\log C = \log B + \log(1-2^{-s}) &= \tfrac{2}{1}2^{-s} + \tfrac{4}{2}\cdot 4^{-s} + \tfrac{8}{3}\cdot 8^{-s} + \tfrac{16}{4}\cdot 16^{-s} + \ldots \\ &\quad - 2^{-s} - \tfrac{1}{2}\cdot 4^{-s} - \tfrac{1}{3}\cdot 8^{-s} - \tfrac{1}{4}\cdot 16^{-s} - \ldots,\end{aligned}$$

et la somme des coefficients des puissances de 2 jusqu'à 2^n inclusivement sera par suite

$$\vartheta''(2^n) = \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^n}{n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

Au lieu des limites trouvées plus haut pour $\theta(2^n)$, on obtient alors

$$\vartheta''(2^n) > \vartheta(2^n) > \vartheta'(2^n),$$

inégalités qu'on peut remplacer par

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{n-1} + \frac{2^n}{n} > \vartheta(2^n) > \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{n-1}.$$

Cette double inégalité se démontre sans difficulté au moyen des limites trouvées par Tchebycheff pour la fonction $\psi(n)$.

D'après Tchebycheff on aura, en désignant par a la constante $0{\cdot}921292\ldots$,

$$\frac{6}{5}am + \frac{5}{4\log 6}(\log m)^2 + \frac{5}{4}\log m + 1 > \psi(m) > am - \frac{5}{2}\log m - 1.$$

Comme on sait, $\psi(m)$ désigne la somme

$$\Sigma \log p + \tfrac{1}{2}\Sigma \log p^2 + \tfrac{1}{3}\Sigma \log p^3 + \tfrac{1}{4}\Sigma \log p^4 + \ldots,$$

étendue aux puissances des nombres premiers ne surpassant pas le nombre m. Si l'on substitue, à la place des logarithmes des puissances de nombres premiers dans l'intervalle 2^{n-1} à 2^n, respectivement $\log 2^{n-1}$ ou $\log 2^n$, on aura

$$\frac{\psi(2^n) - \psi(2^{n-1})}{(n-1)\log 2} > \vartheta(2^n) - \vartheta(2^{n-1}) > \frac{\psi(2^n) - \psi(2^{n-1})}{n \log 2}.$$

Mais on aura, au moyen des limites ci-dessus,

$$\psi(2^n) - \psi(2^{n-1}) \begin{cases} < \frac{6}{5} a \cdot 2^n - a \cdot 2^{n-1} + \frac{5(\log 2)^2}{4 \log 6} n^2 + \frac{5}{4} \log 2 \cdot n + \frac{5}{2} \log 2 \cdot (n-1) + 2, \\ > a \cdot 2^n - \frac{6}{5} a \cdot 2^{n-1} - \frac{5(\log 2)^2}{4 \log 6} (n-1)^2 - \frac{5}{2} \log 2 \cdot n - \frac{5}{4} \log 2 \cdot (n-1) - 2, \end{cases}$$

ou bien, en effectuant les calculs,

$$\vartheta(2^n) - \vartheta(2^{n-1}) < 0{\cdot}9304 \cdot \frac{2^n}{n-1} + 0{\cdot}4836\, n + 4{\cdot}7172 + \frac{3{\cdot}7336}{n-1},$$

$$\vartheta(2^n) - \vartheta(2^{n-1}) > 1{\cdot}0633 \cdot \frac{2^{n-1}}{n} - 0{\cdot}4836\, n - 2{\cdot}7828 - \frac{1{\cdot}2336}{n}.$$

En posant dans ces formules successivement $n = 2, 3, 4, \ldots, n$ et faisant la somme, on obtient pour $\vartheta(2^n)$ des limites qu'on peut exprimer sous la forme

$$\vartheta(2^n) < 0{\cdot}9304 \left(\frac{2^2}{1} + \frac{2^3}{2} + \frac{2^4}{3} + \ldots + \frac{2^n}{n-1}\right) + N,$$

$$\vartheta(2^n) > 1{\cdot}0633 \left(\frac{1}{1} + \frac{2^1}{2} + \frac{2^2}{3} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{n}\right) - N,$$

N étant une fonction de n dont la partie principale est $0{\cdot}2418\, n^2$, et qui pour de grandes valeurs de n sera insignifiante en comparaison des termes qui précèdent.

Si l'on désigne par $F(2^n)$ la fonction

$$\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{n-1} + \frac{2^n}{n},$$

on aura donc nécessairement

$$0{\cdot}9304 \cdot 2F(2^{n-1}) + N > \vartheta(2^n) > 1{\cdot}0633 \cdot \tfrac{1}{2}F(2^n) - N.$$

Ces limites diffèrent, au moins par la forme, de celles trouvées plus haut, savoir

$$F(2^n) > \vartheta(2^n) > F(2^{n-1});$$

mais on peut montrer que cette dernière formule pour de grandes valeurs de n donne des limites un peu plus larges que celles de l'inégalité précédente.

En comparant les deux expressions suivantes

$$F(2^n) = \frac{2^n}{n} + \frac{2^{n-1}}{n-1} + \frac{2^{n-2}}{n-2} + \ldots + \frac{2^2}{2} + \frac{2^1}{1},$$

$$2F(2^{n-1}) = \frac{2^n}{n-1} + \frac{2^{n-1}}{n-2} + \frac{2^{n-2}}{n-3} + \ldots + \frac{2^2}{1},$$

on voit que pour $n > 2$ on aura toujours $F(2^n) < 2F(2^{n-1})$.

Le rapport

$$\varphi_n = \frac{F(2^n)}{2F(2^{n-1})}$$

est donc plus petit que 1. Mais on aura aussi

$$\frac{F(2^n)}{2F(2^{n-1})} = \frac{\dfrac{2^n}{n} + F(2^{n-1})}{\dfrac{2^n}{n-1} + 2F(2^{n-2})},$$

d'où il suit que φ_n sera compris entre les limites $\frac{2^n}{n} : \frac{2^n}{n-1} = \frac{n-1}{n}$ et φ_{n-1}. De même φ_{n+1} sera compris entre $\frac{n}{n+1}$ et φ_n, et ainsi de suite. On s'assure facilement que $\frac{6}{7} > \varphi_7 > \varphi_6$; il est donc clair qu'on aura pour des valeurs plus grandes de n

$$\frac{n-1}{n} > \varphi_n > \varphi_{n-1},$$

en sorte que φ_n, pour des n croissants, se rapproche de plus en plus de la limite 1 par des valeurs croissantes.

Pour cette raison on peut, en choisissant pour n un nombre convenable, faire en sorte que pour tous les n plus grands

$$F(2^n) > 0{\cdot}9304 \cdot 2F(2^{n-1}) + N > \vartheta(2^n) > 1{\cdot}0633 \cdot \tfrac{1}{2} F(2^n) - N > F(2^{n-1}).$$

Il suffit de prendre pour n le plus petit nombre qui satisfasse aux deux inégalités

$$\varphi_n > 0{\cdot}9304 + \frac{N}{2\,F(2^{n-1})} \quad \text{et} \quad \varphi_n > \frac{1}{1{\cdot}0633} + \frac{N}{1{\cdot}0633 \cdot 2\,F(2^{n-1})}.$$

Cela exige que φ_n soit plus grand que $0{\cdot}941$, ce qui arrive déjà pour $n = 19$. En posant $n = 20$, on a $\varphi_{20} = 0{\cdot}946$,

$$F(2^{19}) = 58713{\cdot}7, \qquad F(2^{20}) = 111142{\cdot}5,$$

donc

$$1{\cdot}0633 \cdot \tfrac{1}{2} F(2^{20}) = 59088{\cdot}9 = F(2^{19}) + 375{\cdot}2.$$

En même temps N est plus petit que 200, et l'inégalité en question subsistera donc pour $n = 20$ et conséquemment aussi pour toutes les valeurs supérieures de n. Pour des valeurs inférieures elle peut être vérifiée facilement par voie numérique, et nous avons ainsi démontré complètement que la double inégalité

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^n}{n} > \vartheta(2^n) > \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{n-1}$$

a lieu pour toutes les valeurs entières de n.

Il est évident que cette formule n'a pas de valeur pour la détermination numérique du nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. Pourtant elle peut être utilisée dans des considérations analytiques, et sa forme, qui rappelle celle du logarithme intégral, a elle-même quelque intérêt par sa simplicité. En outre la moyenne des deux limites donne une valeur très approchée de la fonction $\vartheta(2^n)$.

2.

Le théorème de Tchebycheff, dont nous avons fait usage ci-dessus, repose sur la formule

$$T(n) = \psi(n) + \psi\left(\frac{n}{2}\right) + \psi\left(\frac{n}{3}\right) + \psi\left(\frac{n}{4}\right) + \cdots,$$

où n est un nombre entier positif et où $T(n)$, désignant la somme $\Sigma_1^n \log n$, s'exprime par la formule

$$T(n) = n \log n - n + \log \sqrt{2\pi} + \varepsilon \log n + \frac{\rho}{12},$$

$$-\tfrac{1}{2} < \varepsilon < \tfrac{1}{2}, \quad 0 < \rho < 1.$$

En formant l'expression

$$T(n) - T\left(\frac{n}{2}\right) - T\left(\frac{n}{3}\right) - T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{n}{30}\right)$$

$$= \psi(n) - \psi\left(\frac{n}{6}\right) + \psi\left(\frac{n}{7}\right) - \psi\left(\frac{n}{10}\right) + \cdots,$$

on obtient dans le premier membre une fonction qui est comprise entre les limites

$$An + \tfrac{5}{2} \log n \quad \text{et} \quad An - \tfrac{5}{2} \log n - 1,$$

A désignant la constante 0,921292... Dans le second membre on a une somme à termes décroissants et qui ont alternativement les coefficients $+1$ et -1. Cette somme est donc comprise entre $\psi(n)$ et $\psi(n) - \psi\left(\frac{n}{6}\right)$.

Pour aller plus loin dans cette voie, il faudrait choisir une autre combinaison des T en prenant des arguments $\frac{n}{\alpha}, \frac{n}{\beta}, \frac{n}{\gamma}$ qui devraient nécessairement remplir les conditions suivantes:

1° La somme $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} + \ldots$ doit être nulle, afin que le terme $n \log n$ puisse disparaître.

2° La somme $\frac{1}{\alpha} \log \alpha + \frac{1}{\beta} \log \beta - \frac{1}{\gamma} \log \gamma + \ldots$ doit se rapprocher de l'unité.

3° La somme des ψ qui figure au second membre doit être telle qu'on puisse assigner des limites pour la partie de cette somme qui vient après $\psi(n)$, et que le plus grand nombre possible des premiers termes qui suivent $\psi(n)$ disparaissent de la formule.

Ces conditions seront remplies si l'on prend la somme

$$S(n) = T(n) - T\left(\frac{n}{2}\right) - T\left(\frac{n}{3}\right) - T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{n}{6}\right) - T\left(\frac{n}{7}\right) + T\left(\frac{n}{105}\right).$$

On a effectivement

$$1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{105} = 0$$

et d'ailleurs $A =$

$$\tfrac{1}{2}\log 2 + \tfrac{1}{3}\log 3 + \tfrac{1}{5}\log 5 - \tfrac{1}{6}\log 6 + \tfrac{1}{7}\log 7 - \tfrac{1}{105}\log 105 = 0{\cdot}969702.$$

Pour $S(n)$ on obtient des limites de la forme

$$An \pm f(\log n),$$

$f(\log n)$ étant une fonction linéaire en $\log n$, qui pour de grandes valeurs de n s'évanouit par rapport à n et qui par suite n'a qu'un intérêt secondaire.

En formant la combinaison des ψ qui correspond à $S(n)$, nous aurons

$$S(n) = \psi(n) - \psi\left(\frac{n}{10}\right) + \psi\left(\frac{n}{11}\right) + \psi\left(\frac{n}{13}\right) - \psi\left(\frac{n}{14}\right) - \psi\left(\frac{n}{15}\right)$$
$$+ \psi\left(\frac{n}{17}\right) + \psi\left(\frac{n}{19}\right) - \psi\left(\frac{n}{20}\right) - \psi\left(\frac{n}{21}\right) + \cdots$$

On a une suite de termes dont les coefficients seront 1, 0, -1, -2, et qui se reproduisent périodiquement avec une période de 210 termes. Je donne ici les nombres qui entrent comme dénominateurs dans les arguments de la première période, avec les coefficients respectifs. Les termes exclus ont le coefficient 0.

$$+1-10 \mid +11+13-14-15 \mid +17+19-20-21 \mid +23-28 \mid +29-30 \mid$$
$$+31-35 \mid +37-40 \mid +41-42 \mid +43-45 \mid +47-50 \mid +53-56 \mid +59-60 \mid$$
$$+61-63 \mid +67-2.70+71 \mid +73-75 \mid +79-80 \mid +83-84 \mid +89-90 \mid$$
$$+97-98 \mid -100+101+103-105 \mid +107+109-110-112 \mid +113-120 \mid$$
$$+121-126 \mid +127-130 \mid +131-135 \mid +137+139-2.140 \mid +142-147 \mid +149-150 \mid$$
$$+151-154 \mid +157-160 \mid +163-165 \mid +167-168 \mid +169-170 \mid +171-175 \mid +179-180 \mid$$
$$+181-182 \mid +187-189 \mid -190+191 \mid +193-195 \mid -196+197 \mid +199-200 \mid +209-210 \mid.$$

Par des traits verticaux j'ai divisé ces termes en des groupes dont la plupart donnent évidemment une somme partielle positive, parce que $\psi\left(\frac{n}{x}\right)-\psi\left(\frac{n}{x+a}\right)$ ne peut devenir négatif, quand on suppose que les nombres x et a sont tous les deux positifs. Les seuls groupes qui font exception sont les suivants:

$$\psi\left(\frac{n}{67}\right)-2\psi\left(\frac{n}{70}\right)+\psi\left(\frac{n}{71}\right) \Bigg| -\psi\left(\frac{n}{100}\right)+\psi\left(\frac{n}{101}\right) \Bigg|$$
$$-\psi\left(\frac{n}{190}\right)+\psi\left(\frac{n}{191}\right) \Bigg| -\psi\left(\frac{n}{196}\right)+\psi\left(\frac{n}{197}\right),$$

et leurs conjugués dans les périodes suivantes. Mais il est évident que la somme totale deviendra positive si l'on ajoute $\psi\left(\frac{n}{70}\right)$, la somme des termes obtenue après la première periode sera positive si l'on n'ajoute que $\psi\left(\frac{n}{280}\right)$.

La plus grande valeur négative de la somme totale des groupes douteux sera donc inférieure à

$$D=\psi\left(\frac{n}{70}\right)-\psi\left(\frac{n}{71}\right)+\psi\left(\frac{n}{100}\right)-\psi\left(\frac{n}{101}\right)+\psi\left(\frac{n}{190}\right),$$

parce que les termes rejetés

$$\psi\left(\frac{n}{67}\right)-\psi\left(\frac{n}{70}\right)+\psi\left(\frac{n}{191}\right)-\psi\left(\frac{n}{196}\right)+\psi\left(\frac{n}{197}\right)-\psi\left(\frac{n}{280}\right)$$

auront une somme positive.

Mais on peut, au moyen des limites trouvées par Tchebycheff, montrer qu'il y a dans les premiers groupes positifs un surplus qui suffit à couvrir la partie négative $-D$, ce surplus provenant des termes

$$\varDelta = \psi\left(\frac{n}{11}\right) - \psi\left(\frac{n}{15}\right) + \psi\left(\frac{n}{17}\right) - \psi\left(\frac{n}{21}\right) + \psi\left(\frac{n}{23}\right) - \psi\left(\frac{n}{28}\right).$$

Car, en cherchant la limite inférieure de la différence $\varDelta - D$, on obtient pour le coefficient de n dans l'expression

$$\varDelta - D > kn \pm f_1(\log n)$$

la valeur

$$k = 0{\cdot}921292\left[\left(\tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{23} + \tfrac{1}{71} + \tfrac{1}{101}\right) - \tfrac{6}{5}\left(\tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{28} + \tfrac{1}{70} + \tfrac{1}{100} + \tfrac{1}{190}\right)\right].$$

Ici le facteur rationnel entre crochets a la valeur positive 0·0017377, donc k sera positif. On trouve

$$k = 0{\cdot}0016009.$$

La fonction $f_1(\log n)$, n'étant que du second degré en $\log n$, finira nécessairement par être moindre que le terme kn, et la différence $\varDelta - D$ sera donc, pour de valeurs de n assez grandes, nécessairement positive.

D'après cela il est clair qu'on aura

$$S(n) = \psi(n) - \psi\left(\frac{n}{10}\right) + Kn \pm f_1(\log n) \qquad (K > 0)$$

ou bien

$$\psi(n) < An + \psi\left(\frac{n}{10}\right) + F(\log n)$$

F étant une fonction du second degré en $\log n$. De là il suit qu'on aura également

$$\psi(n) < \tfrac{10}{9} An + F_1(\log n) = 1{\cdot}077447\, n + F_1(\log n),$$

tandis que Tchebycheff donne pour n le coefficient 1·10555.

Pour ce qui concerne la limite inférieure, on s'assure facilement que, exception faite des termes

$$E = \psi\left(\frac{n}{13}\right) - \psi\left(\frac{n}{14}\right) + \psi\left(\frac{n}{19}\right) - \psi\left(\frac{n}{20}\right) + \psi\left(\frac{n}{109}\right) - \psi\left(\frac{n}{110}\right) + \psi\left(\frac{n}{139}\right) - \psi\left(\frac{n}{140}\right) + \psi\left(\frac{n}{223}\right),$$

la somme de tous les autres ψ qui viennent après $\psi(n)$ sera une quantité négative. En appliquant la limite inférieure de Tchebycheff et la limite supérieure trouvée ci-dessus, on obtient pour E une limite supérieure. Le coefficient de n dans cette limite a pour valeur

$$1{\cdot}077447\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{19}+\frac{1}{109}+\frac{1}{139}+\frac{1}{223}\right)-0{\cdot}921292\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{20}+\frac{1}{110}+\frac{1}{140}\right)$$
$$= 0{\cdot}035229.$$

Donc on aura

$$S_n = \psi(n)+0{\cdot}035229\,n-Kn\pm F_2(\log n)$$

ou bien

$$\psi(n)>(0{\cdot}969702-0{\cdot}035229)\,n\pm F(\log n),$$

ce qui donne

$$\psi(n)>0{\cdot}93447\,n\pm F(\log n).$$

En n'ayant pas égard aux termes logarithmiques, on obtient donc

$$1{\cdot}07745\,n>\psi(n)>0{\cdot}93447\,n$$

au lieu de

$$1{\cdot}10555\,n>\psi(n)>0{\cdot}92129\,n.$$

L'intervalle entre les deux limites est par là réduit environ à trois quarts de sa grandeur originelle, mais nous avouons sans difficulté que ce résultat n'a pas grande importance, surtout parce qu'il nous semble trop clair qu'on ne sera pas en état de poursuivre le procédé de manière à se rapprocher indéfiniment de l'unité comme valeur véritable de la constante considérée.